Calcul matriciel et Déterminant

DÉTERMINANTS

Déterminant d'ordre 2

Le symbole $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ est appelé déterminant d'ordre 2 de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et est défini par :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemples :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 3 = 5 - 6 = -1.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 5 = 6 - 5 = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 3 \times 2 = 5 - 6 = -1.$$

On constate alors que :

1. Si deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant sont permutées la valeur du déterminant est multipliée par (-1).
2. $\det({}^tA) = \det A$, d'où la valeur d'un déterminant est conservée lorsque l'on échange les colonnes et les lignes (dans le même ordre).

Déterminant d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, on définit

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \textit{mineur de } a_{11}}} - a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \textit{mineur de } a_{21}}} + a_{31} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \textit{mineur de } a_{31}}}. \end{aligned}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}. \\ &= 12 - 12 - 12 = -12. \end{aligned}$$

Le cofacteur de l'élément de $(\det A)$ de la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ème}$ colonne (noté C_{ik}) est égal à $(-1)^{i+k}$ fois **le mineur** de cet élément (i.e. le déterminant d'ordre 2 obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ème}$ colonne).

1. Le cofacteur de a_{22} est $C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.
2. Les signes $(-1)^{i+j}$ forment la table suivante $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$.

3. On peut écrire $\det A$ sous la forme :

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

où C_{i1} est le cofacteur de a_{i1} dans $\det A$.

Le déterminant de A, $\det A$, peut être developpé suivant n'importe quelle ligne ou colonne, c'est à dire, qu'il peut être écrit sous la forme d'une somme de trois éléments de n'importe quelle ligne (ou colonne), chacun multiplié par son cofacteur. **Exemple :**

$$\det A = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Si tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'une matrice A sont multipliés par une constante k, la valeur du nouveau déterminant est k fois la valeur du déterminant initial. Cette propriété peut être utilisée pour simplifier un déterminant. **Exemple :**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2\times 1 & 2\times 3 & 2\times 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 3\times 1 & 0 \\ 1 & 3\times 1 & 2 \\ -1 & 3\times 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\times 0 \\ 1 & 1 & 2\times 1 \\ -1 & 0 & 2\times 1 \end{vmatrix} = 6\times 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

1. Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant sont nuls, la valeur du déterminant est nulle.
2. Si deux lignes (ou colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles, la valeur du déterminant est nulle.
3. Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant est exprimé sous la forme d'un binôme, le déterminant peut être écrit comme somme de deux déterminants.

Exemples :

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

La valeur d'un déterminant est conservée si l'on ajoute à une ligne (ou à une colonne) une combinaison des autres lignes (ou colonnes). **Exemples :** •

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[=]{C_1 \to C_1 + C_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$C_1 \to C_1 + C_3$ signifie que l'on a ajouté la colonne C_3 à la colonne C_1. •

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[=]{C_1 \to C_1 + C_2 - C_3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 5(-4+4) = 0.$$

La ligne (ou colonne) dans laquelle seront effectués les calculs ne doit pas être multipliée par des scalaires. La multiplication par un scalaire λ reviendrait à multiplier le déterminant par λ. **Exemple :**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \to 2L_1 - L_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \text{ alors que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Déterminant d'ordre n

Le symbole $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ est appelé déterminant d'ordre n. • Pour $n = 1$, ça signifie a_{11}. • Pour $n \geq 2$, ça signifie la somme des produits des éléments de n'importe quelle ligne ou colonne par leurs cofacteurs respectifs c'est à dire :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in},$$

$(i = 1; 2; \dots; \ ou$ n). Ou bien

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1k}C_{1k} + a_{2k} + C_{2k} + \dots + a_{nk}C_{nk},$$

$(k = 1; 2; \dots; \ ou$ n). • Le déterminant d'ordre n est alors défini en fonction de n déterminants d'ordre $(n-1)$, chacun est à son tour, défini en fonction de $(n-1)$ déterminants d'ordre $(n-2)$ et ainsi de suite, finalement on aboutit aux déterminants d'ordre 2.

1. Les propriétés précédentes relatives au déterminant d'ordred 3 restent valables pour un déterminant d'ordre n.
2. Pour calculer la valeur d'un déterminant, on développera suivant la ligne ou colonne où il y a le plus de zéros.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[=]{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1. $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général.
2. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
3. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ où A^{-1} désigne l'inverse de A.

Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n

On rappelle qu'une matrice carrée A d'ordre n est inversible s'il existe une matrice B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$ où I_n est la matrice unité d'ordre n, c'est à dire la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

1. A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
2. Si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj(A))$$

où $(adj(A))$ désigne l'adjoint classique de A c'est à dire la matrice ${}^t[C_{ij}]$ où C_{ij} désigne la matrice des cofacteurs de A.

Exemple : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[=]{L_1 \to L_1 - 2L_3} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -14 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -14 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -46 \neq 0.$$

Alors $\det A \neq 0$ et donc A est inversible. Déterminons les 9 cofacteurs de A :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18,\ C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2,\ C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11,\ C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14,\ C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10,\ C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,\ C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

La matrice des cofacteurs de A devient :

$$[C_{ij}] = \begin{pmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par suite :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adj(A)) = \frac{1}{\det A}{}^{t}[C_{ij}] = -\frac{1}{46}\begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

2 Systèmes linéaires

SYSTÈMES LINÉAIRES

Définitions

Un système de n équations et m variables inconnues, est un ensemble des équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ sont les coefficients du système linéaire, x_i sont les inconnues et les b_i sont les termes indépendants. Résoudre le système, c'est trouver les valeurs de $x_1, ..., x_m$ vérifiant les équations antérieurs. Les systèmes sont classifiés de la manière suivante :

1. Système incompatible : s'il n'admet pas de solution.
2. Systèmes compatible : s'il admet au moins une solution.
   — Compatible déterminé : s'il admet un nombre fini de solution.
   — Compatible indéterminé : s'il admet un nombre infini de solution.

Forme matricielle

Le système antérieur peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Notons : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Aors le système devient :

$$AX = B.$$

A est dite matrice du système. Le système peut être écrit sous cette forme :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Résolution de systèmes linéaires : (Méthode de Cramer)

Dans le cas d'un système linéaire à n équations et n inconnues, de la forme $AX = B$, où A est une matrice carrée d'ordre n.

Le système peut être résolu par la méthode de Cramer, à l'aide des déterminants, lorsque $\det A \neq 0$. Si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, alors

$$x_i = \frac{1}{\det A} \det B_i$$

où B_i est la matrice obtenue en remplaçant la $i^{ème}$ colonne de A par B. **Exemple :** Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 & & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & = & 5. \end{cases}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients de ce système.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[=]{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Alors $\det A \neq 0$, la matrice A est inversible et le système admet une seule solution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$x_1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -7 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -3.$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}.$$

$$x_3 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{5}{3}.$$

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les $*$ désignent des coefficients quelconques
les $\oplus$ des pivots, coefficients non nuls

Résolution des systèmes linéaires avec la méthode du pivot de Gauss

une matrice est dite échelonnée (en lignes) si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne, (appelée pivot), augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ A matrice échelonnée $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ B matrice non échelonnée. Une matrice est dite échelonnée réduite si :

1. Les pivots valent 1
2. les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.

Exemples : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ C matrice échelonnée réduite Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée réduite au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes :

— On inter change l'ordre des lignes.

— On multiplie une ligne par un scalaire non nul.

— On ajoute à une ligne une combinaison linéaire des lignes restantes.

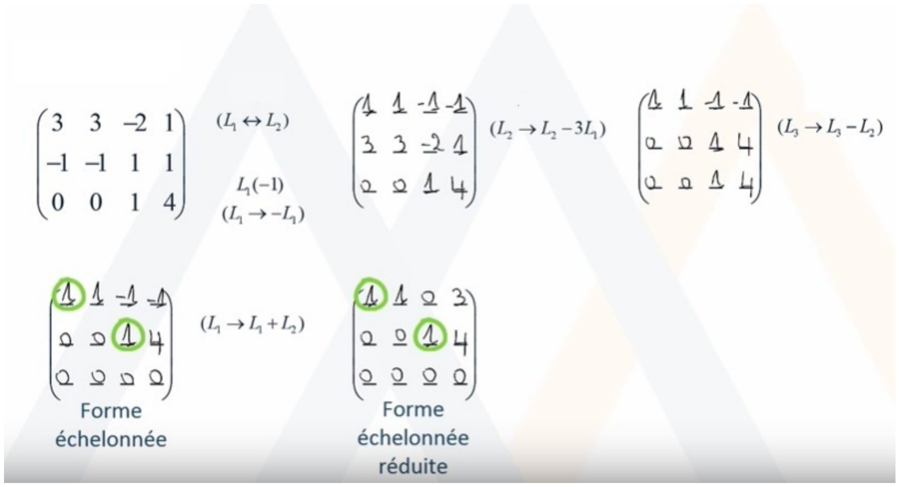
La matrice échelonnée réduite ainsi obtenue est unique.

Exemple :

Méthode du pivot de Gauss : La méthode du pivot de Gauss consiste à transformer, à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes, la matrice système en une matrice échelonnée réduite .

On obtient ainsi un nouveau système équivalent au système initial (les deux systèmes ont les mêmes solutions). **Exemple :** Résoudre le système suivant avec la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 2. \end{cases}$$



La matrice du système est :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Avec les opérations $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 + L_1$ on obtient :

$$(A|B) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

Avec l'opération $L_3 \to L_3 + L_2$, on obtient :

$$(A|B) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Avec les opérations $L_2 \to \frac{1}{2}L_2$ et $L_3 \to -L_3$, on obtient :

$$(A|B) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Ce qui donne le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & z & = & 1. \end{array} \right.$$

La soulution est alors : $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1. \end{array} \right.$